

Über einige Randintegrale der Elastomechanik

Günther, Wilhelm

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 14, 1962,
S.53-72



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Über einige Randintegrale der Elastomechanik

Von Wilhelm Günther, Karlsruhe

Vorgelegt von Herrn H. Schaefer

Eingegangen am 20. 6. 1962

Übersicht: Ein bekanntes Theorem von *E. Noether* wird verwendet, um Aussagen über das Verhalten linear-elastischer Felder auf den Bereichsrändern zu gewinnen. In Sonderfällen ergeben sich recht übersichtliche Formeln, z. B. für Balken, Platten, Umdrehungskörper und Rotationsschalen.

Summary: Following a well known theorem of *E. Noether*, in this paper some formulas will be derived concerning with the behaviour of linear-elastic fields on the borders of an elastic range. These formulas are, especially, prepared for use in the theory of rods and plates, and also in the theory of bodies and shells of revolution.

Einleitung

Ein Theorem von *E. Noether* [1] ermöglicht es, aus den Feldfunktionen eines Variationsproblems divergenzfreie Größen zu konstruieren, wenn das Extremalintegral gewisse Invarianzeigenschaften besitzt. In der klassischen Mechanik führt die Anwendung dieses Theorems im wesentlichen zu dem bekannten Ergebnis, daß jeder zyklischen Größe eines mechanischen Problems ein Integral seiner Bewegungsgleichungen zugeordnet ist [2]. liefert somit nichts eigentlich Neues. Ausgiebig verwendet wird das *Noethersche* Theorem in der Quantenfeldtheorie [3]. [4]. [5] für den Aufbau von Erhaltungssätzen beispielsweise für Energie, Spin und Ladungsgrößen. Hier sollen nun einige Anwendungen im Bereich der Elastomechanik erörtert werden. Von vornherein wird man dabei keine Ergebnisse erwarten dürfen, die nicht auch auf anderem Wege gewonnen werden könnten, denn die prinzipiellen Eigenschaften elastischer Felder sind ja wohlbekannt; es werden sich aber doch einige Sätze ergeben, die bisher anscheinend nicht beachtet worden sind.

1. Das Noethersche Theorem

Da sich unsere Überlegungen z. T. auf elastische Gebilde mit nicht ebenen bzw. geradlinigen Begrenzungen beziehen werden, rechnen wir in allgemeinen Koordinaten $x^{(i)}$ des Euklidischen Raumes ($i = 1, 2, 3$) bzw. der Euklidischen Ebene ($i = 1, 2$). Die Summationsregel ist dann der Anzahl n der Dimensionen entsprechend anzuwenden. Im übrigen setzen wir die Elemente der Tensoranalysis als bekannt voraus und merken nur an, daß wir den Ortsvektor in der Form

$$\mathbf{r} = r^{\alpha} \mathbf{g}_{\alpha} \quad (1.1)$$

schreiben; die Größen

$$g_i = \frac{\partial r}{\partial x^i} = \partial_i r \quad (1,2)$$

sind die Maßvektoren.

Die reziproken Maßvektoren g^k sind durch

$$g^k \circ g_i = \delta_i^k$$

definiert; dabei ist angenommen, daß die Determinante g des Maßtensors

$$g_{ik} = g_i \circ g_k$$

höchstens in einzelnen Ausnahmepunkten verschwindet, sonst aber positiv ist. Schließlich werden wir häufig die Formel

$$\nabla_i u_k = g_k \circ \partial_i u \quad (1,3)$$

benutzen, die in einfacher Weise kovariante und gewöhnliche Differentiation eines Vektorfeldes miteinander verknüpft. Wir betrachten nun im Falle $n = 3$ (für $n = 2$ verläuft alles entsprechend) das Variationsproblem

$$\delta \iiint L(u, \partial_i u, r) \sqrt{g} \, dx^1 \, dx^2 \, dx^3 = 0. \quad (1,4)$$

Vom Standpunkt der Elastizitätstheorie aus, in der gewöhnlich noch Oberflächenintegrale in den Variationsprozeß einbezogen werden müssen, ist das Variationsproblem (1,4) natürlich zu speziell; für die Existenz der Noetherschen Relationen, deren Herleitung wir jetzt im Auge haben, spielen solche Oberflächenintegrale jedoch keine Rolle, so daß wir von ihnen zunächst absehen können. In (1,4) ist L die skalare Lagrange-Funktion, während $\mathfrak{L} = L \cdot \sqrt{g}$ eine Lagrangesche Dichte vom Gewicht $+1$ ist. Als notwendige Extremumsbedingungen erhält man nach dem üblichen Verfahren die Lagrangeschen Gleichungen in der nicht kovarianten Form

$$\left[\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u_k} \right]_{\substack{x^{(l)} = \text{const.}, \\ \partial_i u_k = \text{const.}}} - \partial_\alpha \left[\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (\partial_\alpha u_k)} \right]_{\substack{x^{(l)} = \text{const.}, \\ u_k = \text{const.}}} = 0. \quad (1,5)$$

Eine kovariante Darstellung läßt sich aus (1,5) leicht entwickeln:

Es ist

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (\partial_i u_k)} = \sqrt{g} \cdot \frac{\partial L}{\partial (\nabla_i u_k)}$$

und ferner

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u_k} \right]_{\substack{x^{(l)} = \text{const.}, \\ \partial_i u_k = \text{const.}}} &= \sqrt{g} \cdot \left\{ \left[\frac{\partial L}{\partial u_k} \right]_{\substack{x^{(l)} = \text{const.}, \\ \nabla_i u_k = \text{const.}}} + \frac{\partial L}{\partial (\nabla_\alpha u_\beta)} \cdot \left[\frac{\partial (\nabla_\alpha u_\beta)}{\partial u_k} \right]_{\partial_i u_k = \text{const.}} \right\} = \\ &= \sqrt{g} \cdot \left\{ \left[\frac{\partial L}{\partial u_k} \right]_{\substack{x^{(l)} = \text{const.}, \\ \nabla_i u_k = \text{const.}}} - \Gamma_{\alpha\beta}^k \frac{\partial L}{\partial (\nabla_\alpha u_\beta)} \right\}; \end{aligned}$$

Γ_{il}^k das Christoffelsche Dreiindizesymbol. Beachtet man noch die Beziehung

$$\partial_i \sqrt{g} = \sqrt{g} \Gamma_{il}^\lambda,$$

so geht (1,5) in die kovariante Form

$$\left[\frac{\partial L}{\partial u_k} \right]_{\substack{x^{(l)} = \text{const.}, \\ \nabla_i u_k = \text{const.}}} - \nabla_\alpha \left[\frac{\partial L}{\partial (\nabla_\alpha u_k)} \right] = 0 \quad (1,6)$$

über. Die Einführung des Impulstensors

$$p^{ik} = \frac{\partial L}{\partial (\nabla_i u_k)}$$

bzw. der Impulsvektoren

$$p^i = p^{i\lambda} g_\lambda = g_\lambda \cdot \frac{\partial L}{\partial (\nabla_i u_\lambda)}$$

ist zweckmäßig. Wir erhalten dann als Lagrangesche Gleichungen:

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} - \nabla_\alpha p^{\alpha k} = 0$$

bzw.

$$g_\alpha \frac{\partial L}{\partial u_\alpha} - \nabla_\alpha p^\alpha = 0, \quad (1,7)$$

wobei $\frac{\partial L}{\partial u_k}$ gemäß (1,6) zu berechnen ist.

Der Vektor $u = u(x^{(l)})$ sei nun eine Lösung der Lagrangeschen Gleichungen. Wir nehmen an, daß infinitesimale Punkttransformationen

$$r^* = r + \delta r \quad (1,8a)$$

und infinitesimale Feldtransformationen

$$u^*(x^{(l)*}) = u(x^{(l)}) + \delta u \quad (1,8b)$$

existieren, denen gegenüber das Integral (1,4) in 1. Näherung invariant bleibt:

$$\begin{aligned} & \iiint L^*(u^*, \partial_i^* u^*, r^*) \cdot \sqrt{g^*} dx^{1*} dx^{2*} dx^{3*} = \\ & = \iiint L(u, \partial_i u, r) \cdot \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \end{aligned} \quad (1,9)$$

Die Änderung δu setzt sich aus einer Änderung δu der Funktionsform von u und aus einer Änderung des Funktionsargumentes infolge der Punkttransformation (1,8a) zusammen:

$$\delta u = \bar{\delta} u + \partial_\alpha u \cdot \delta x^\alpha. \quad (1,10)$$

Ebenso wird, mit $L^* = L + \delta L$:

$$\delta L = \bar{\delta} L + \nabla_\alpha L \cdot \delta x^\alpha,$$

wobei $\nabla_i L$ die „totale“ Ableitung von L nach x^i ist:

$$\nabla_i L = \left[\frac{\partial L}{\partial u_k} \right]_{\substack{x^{(l)} = \text{const.}, \\ \nabla_i u_k = \text{const.}}} + \nabla_i u_\lambda \cdot \left[\frac{\partial L}{\partial u_\lambda} \right]_{\substack{x^{(l)} = \text{const.}, \\ \nabla_i u_k = \text{const.}}} + p^{\lambda\mu} \nabla_i \nabla_\lambda u_\mu. \quad (1,11)$$

Da ferner

$$\sqrt{g}^* = \sqrt{g} + \partial_\lambda \sqrt{g} \cdot \delta x^\lambda = \sqrt{g} (1 + \Gamma_{\lambda\beta}^\beta \cdot \delta x^\lambda)$$

und, in derselben Näherung,

$$dx^{1*} dx^{2*} dx^{3*} = dx^1 dx^2 dx^3 \cdot \frac{\partial (x^{1*}, x^{2*}, x^{3*})}{\partial (x^1, x^2, x^3)} = dx^1 dx^2 dx^3 [1 + \partial_\mu (\delta x^\mu)]$$

ist, wie man durch Ausrechnen der Funktionaldeterminante leicht nachprüft, folgt:

$$\begin{aligned} L^* \cdot \sqrt{g}^* \cdot dx^{1*} dx^{2*} dx^{3*} &= [L + \bar{\delta} L + \nabla_\alpha L \cdot \delta x^\alpha] \cdot \\ &\cdot [1 + \Gamma_{\lambda\beta}^\beta \delta x^\lambda] \cdot [1 + \partial_\mu (\delta x^\mu)] \cdot \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 = \\ &= [L + \bar{\delta} L + \nabla_\alpha (L \cdot \delta x^\alpha)] \cdot \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3, \end{aligned}$$

so daß die Invarianzforderung (1,9) auf

$$\bar{\delta} L + \nabla_\alpha (L \delta x^\alpha) = 0 \quad (1,12)$$

führt. Schließlich berechnen wir noch $\bar{\delta} L$:

$$\bar{\delta} L = \frac{\partial L}{\partial u_\beta} \bar{\delta} u_\beta + p^{\alpha\beta} \nabla_\alpha (\bar{\delta} u_\beta) = \left[\frac{\partial L}{\partial u_\beta} - \nabla_\alpha p^{\alpha\beta} \right] \bar{\delta} u_\beta + \nabla_\alpha (p^{\alpha\beta} \bar{\delta} u_\beta),$$

somit auf Grund der Lagrangeschen Gleichungen (1,7) und nach (1,10):

$$\bar{\delta} L = \nabla_\alpha (p^{\alpha\beta} \bar{\delta} u_\beta) = \nabla_\alpha (p^\alpha \circ \bar{\delta} u) = \nabla_\alpha [p^\alpha \circ (\delta u - \partial_\lambda u \cdot \delta x^\lambda)].$$

Dies fassen wir mit (1,12) zu

$$\boxed{\nabla_\alpha [(L \delta_\lambda^\alpha - p^\alpha \circ \partial_\lambda u) \delta x^\lambda + p^\alpha \circ \delta u] = 0} \quad (1,13)$$

zusammen; unsere Invarianzforderung hat also zur Konstruktion eines divergenzfreien Vektorfeldes geführt. Ist nun die Transformation (1,8) durch m voneinander unabhängige *konstante* infinitesimale Parameter $c_{(\mu)}$ in folgender Weise gegeben:

$$\begin{aligned} \delta x^i &= \sum_{\mu=1}^m X^{i(\mu)} \cdot c_{(\mu)}, \\ \delta u_k &= \sum_{\mu=1}^m U_k^{(\mu)} \cdot c_{(\mu)}, \end{aligned} \quad (1,14)$$

mit

$$X^{i(\mu)} = X^{i(\mu)}(r, u), \quad U_k^{(\mu)} = U_k^{(\mu)}(r, u),$$

so gibt es nach (1,13) m voneinander unabhängige Vektoren $\mathfrak{N}^{(\mu)}$:

$$N^{i(\mu)} = (L \delta_\lambda^i - p^i \circ \partial_\lambda u) X^{\lambda(\mu)} + (p^i \circ g^\lambda) U_\lambda^{(\mu)}, \quad (1,15)$$

deren Divergenz verschwindet:

$$\nabla_\alpha N^{\alpha(\mu)} = 0 \quad (\mu = 1, \dots, m), \quad (1,16)$$

und diese Vektoren fügen sich zu einem Tensor N^{ik} zusammen, wenn die $c_{(\mu)}$ die Maßzahlen c_μ eines konstanten, infinitesimalen Vektorfeldes \mathfrak{c} sind. Dann können wir statt (1,16) auch schreiben:

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha \mathfrak{N}^\alpha &= 0 \\ \text{mit} \quad \mathfrak{N}^i &= N^{i\mu} g_\mu. \end{aligned} \quad (1,17)$$

Dieser Fall, sowie der Fall $m = 1$, in dem es nur einen divergenzfreien Vektor \mathfrak{N} gibt, ist von besonderem Interesse für die Anwendungen in der Elastomechanik.

Es sei nun $\mathfrak{n} = n_\alpha g^\alpha$ der nach außen weisende Normaleneinheitsvektor eines abgeschlossenen Raumteiles V mit der Oberfläche F , und in V mit F sei der Gaußsche Integralsatz anwendbar. Dann folgt im Falle $m = 1$ aus (1,16):

$$\iint_{(F)} n_\alpha N^\alpha dF = 0, \quad (1,18)$$

und im Falle eines vektoriellen Transformationsparameters aus (1,17):

$$\iint_{(F)} n_\alpha \mathfrak{N}^\alpha dF = 0.$$

2. Elastische Felder

Wir behandeln nur Gleichgewichtszustände und gehen aus vom Minimalprinzip für die Verschiebungen \mathfrak{u} eines linear-elastischen Körpers:

$$\delta \left\{ \iiint_{(V)} \left[\frac{1}{2} E^{\alpha\beta, \lambda\mu} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\lambda\mu} - \mathfrak{u} \circ \mathfrak{X} \right] dV - \iint_{(\Sigma F_{(P^k)})} \mathfrak{u} \circ \mathfrak{P} dF_{(P^k)} \right\} = 0; \quad (2,1)$$

dabei ist

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_k + \nabla_k u_i) \quad (2,2)$$

der Deformationstensor,

$$E^{ik, lm} = E^{ki, lm} = E^{ik, ml} = E^{lm, ik} \quad (2,3)$$

der Elastizitätstensor, \mathfrak{X} der Vektor der Volumkraftdichte, \mathfrak{P} der Vektor der Oberflächenbelastung, $F_{(P^k)}$ derjenige Anteil der Begrenzungsfläche, auf der P^k gegeben ist. Der Spannungstensor σ^{ik} hängt mit dem Deformationstensor durch

$$\sigma^{ik} = E^{ik, \lambda\mu} \varepsilon_{\lambda\mu} \quad (2,4)$$

zusammen; es ist also

$$L = \frac{1}{2} \sigma^{\lambda\mu} \cdot \varepsilon_{\lambda\mu} - \mathfrak{u} \circ \mathfrak{X}, \quad (2,5)$$

woraus sich, wenn man (2,2) beachtet, der Impulstensor zu

$$p^{ik} = \sigma^{ik} \quad (2,6)$$

ergibt. Die Lagrangeschen Gleichungen

$$\nabla_{\alpha} \sigma^{\alpha k} + X^k = 0 \text{ bzw. } \nabla_{\alpha} p^{\alpha} + \mathfrak{X} = 0, \quad (2,7)$$

die Gleichgewichtsbedingungen im Bereichsinnern, beschreiben zusammen mit dem Materialgesetz (2,4) und den Formänderungsgleichungen (2,2) das elastische Verhalten des Körpers; dazu kommen noch die Grenzbedingungen auf $F_{(P^k)}$:

$$n_{\alpha} \sigma^{\alpha k} = P^k \text{ bzw. } n_{\alpha} p^{\alpha} = \mathfrak{P}. \quad (2,8)$$

Wir wollen nun einige Transformationen untersuchen, denen gegenüber das Volumintegral in (2,1) unter gewissen Bedingungen unempfindlich ist.

Elementar ist die Transformation

$$\delta \mathbf{r} = 0, \quad \delta \mathbf{u} = \mathbf{c}^{(1)} + \mathbf{c}^{(2)} \times \mathbf{r}, \quad (2,9)$$

die für $\mathfrak{X} = 0$ zulässig ist und eine virtuelle starre Verrückung darstellt. Sie liefert unmittelbar

$$\iint \mathfrak{P} dF = 0, \quad \iint \mathbf{r} \times \mathfrak{P} dF = 0, \quad (2,10)$$

also die triviale Aussage, daß sich, beim Fehlen von Volumkräften, die Oberflächenlasten am Körper das Gleichgewicht halten; dies gilt natürlich unabhängig vom Elastizitätsgesetz.

Ganz anders liegt der Fall, wenn wir Invarianz gegenüber einer (infinitesimalen) Verlagerung

$$\delta \mathbf{r} = \mathbf{c}^{(1)} + \mathbf{c}^{(2)} \times \mathbf{r} \quad (2,11a)$$

des Koordinatensystems verlangen, wobei dann

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{c}^{(2)} \times \mathbf{u} \quad (2,11b)$$

wird. Wir spalten dies in die Translation

$$\delta^{(1)} \mathbf{r} = \mathbf{c}^{(1)}, \quad \delta^{(1)} \mathbf{u} = 0 \quad (2,12)$$

und die Rotation

$$\delta^{(2)} \mathbf{r} = \mathbf{c}^{(2)} \times \mathbf{r}, \quad \delta^{(2)} \mathbf{u} = \mathbf{c}^{(2)} \times \mathbf{u} \quad (2,13)$$

auf und beginnen mit (2,12). Diese Transformation ist zulässig, wenn die Koordinaten $x^{(i)}$ im Integranden des Volumintegrals (2,1) nicht explizit (d. h. außerhalb von u_k und $\nabla_i u_k$) vorkommen. Der Körper muß also elastisch homogen (nicht notwendig aber auch elastisch isotrop) sein, und es sind nur konstante Volumkraftdichten zugelassen.

Dann erhält man nach (2,12), (1,15), (1,19) und (2,8):

$$\boxed{\iint [\mathfrak{n} L - \mathfrak{g}^{\lambda} (\mathfrak{P} \cdot \partial_{\lambda} \mathbf{u})] dF = 0} \quad (2,14)$$

Etwas schwieriger ist der Fall (2,13) der Rotationsinvarianz zu behandeln: Wir berechnen zunächst die Größen \mathfrak{N}^i , (1,17), und erhalten für sie nach (1,15) und (2,13)

$$\mathfrak{N}^i = \mathbf{r} \times [\mathfrak{g}^i L - \mathfrak{g}^i (\mathfrak{p}^i \circ \partial_\lambda u)] + \mathbf{u} \times \mathfrak{p}^i. \quad (2,15)$$

Wenn also (2,13) eine zulässige Transformation ist, folgt aus (2,15), (1,19) und (2,8):

$$\iint \{ \mathbf{r} \times [\mathfrak{n} L - \mathfrak{g}^i (\mathfrak{P} \circ \partial_\lambda u)] + \mathbf{u} \times \mathfrak{P} \} dF = 0. \quad (2,16)$$

Um die Zulässigkeitsbedingungen zu finden, bilden wir die Divergenz von (2,15) und berücksichtigen dabei, daß

$$\nabla_i \mathbf{r} = \partial_i \mathbf{r} = \mathfrak{g}_i, \quad \nabla_i \mathfrak{g}^k = 0, \quad \mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}^\alpha = 0$$

gilt. So erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha \mathfrak{N}^\alpha &= (\mathbf{r} \times \mathfrak{g}^i) [\nabla_\lambda L - \nabla_\alpha \mathfrak{p}^\alpha \circ \partial_\lambda u - \mathfrak{p}^\alpha \circ \nabla_\alpha \nabla_\lambda u] - \\ &\quad - (\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}^i) (\mathfrak{p}^\alpha \circ \partial_\lambda u) + \partial_\lambda \mathbf{u} \times \mathfrak{p}^\alpha + \mathbf{u} \times \nabla_\alpha \mathfrak{p}^\alpha. \end{aligned}$$

Für die „totale“ Ableitung $\nabla_\lambda L$ setzen wir (1,11) ein und benutzen ferner die Lagrangeschen Gleichungen (2,7).

Dann bleibt:

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha \mathfrak{N}^\alpha &= (\mathbf{r} \times \mathfrak{g}^i) \cdot [\partial_\lambda L]_{\substack{u_k = \text{const.}, \\ \nabla_i u_k = \text{const.}}} - (\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}^i) (\mathfrak{p}^\alpha \circ \partial_\lambda u) + \\ &\quad + \nabla_\alpha \mathbf{u} \times \mathfrak{p}^\alpha - \mathbf{u} \times \mathfrak{X}. \end{aligned} \quad (2,17)$$

Das erste Glied in (2,17) verschwindet, wenn die Koordinaten $x^{(i)}$ in L zyklisch sind, also bei Translationsinvarianz. Andererseits ist dies auch notwendig dafür, daß die Divergenz (2,17) verschwindet. Nach Multiplikation mit $\mathfrak{g}^i \times \mathfrak{g}^j$, Anwendung des Entwicklungssatzes und Einführung des Deformationstensors gemäß (2,2) ergibt sich

$$(\mathfrak{g}^i \times \mathfrak{g}^j) \circ \nabla_\alpha \mathfrak{N}^\alpha = 2 [\sigma^{i\alpha} \varepsilon_\alpha^j - \sigma^{j\alpha} \varepsilon_\alpha^i] + [u^i X^j - u^j X^i]. \quad (2,18)$$

Dieser Ausdruck und damit die Divergenz (2,17) kann i. a. nur verschwinden, wenn keine Volumkräfte vorhanden sind. Die Bedeutung der dann noch verbleibenden Bedingungen

$$\sigma^{i\alpha} \varepsilon_\alpha^j - \sigma^{j\alpha} \varepsilon_\alpha^i = 0 \quad (2,19)$$

erkennt man, indem man zu cartesischen Koordinaten übergeht und das Elastizitätsgesetz in der *Foigtschen* Form

$$\mathbf{s} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{e} \quad (2,20)$$

ansetzt; \mathbf{s} der „Spannungsvektor“, \mathbf{C} die Elastizitätsmatrix, \mathbf{e} der „Deformationsvektor“. Die Bedingung

$$\sigma_{1\alpha} \varepsilon_{2\alpha} - \sigma_{2\alpha} \varepsilon_{1\alpha} = 0 \quad (2,21)$$

(Rotationssymmetrie um die 3-Achse) führt dann auf den Fall der „elastischen Rotationssymmetrie“ (Hierzu gehört u. a. auch die hexagonale Symmetrie mit 5 Elastizitätskonstanten, z. B. in [6], S. 180).

Verlangt man auch noch Rotationssymmetrie etwa um die 1-Achse:

$$\sigma_{2x} \varepsilon_{3x} - \sigma_{3x} \varepsilon_{2x} = 0, \quad (2,22)$$

so ergibt sich bereits elastische Isotropie.

Im Falle der ebenen Elastizitätstheorie aber zieht schon (2,21) elastische Isotropie nach sich, mit

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{E}{1 - \nu^2}, & c_{12} &= \frac{E \nu}{1 - \nu^2}, \\ c_{66} &= \frac{1}{2} \frac{E}{1 + \nu} = \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}). \end{aligned} \quad (2,23)$$

Abschließend wenden wir uns der Ähnlichkeitstransformation

$$\delta \mathbf{r} = c \cdot \mathbf{r}, \quad \delta \mathbf{u} = k c \cdot \mathbf{u} \quad (2,24)$$

zu (über die Konstante k werden wir in Kürze verfügen), und wir setzen wieder voraus, daß die Koordinaten $x^{(i)}$ sowie \mathbf{u} in L zyklisch sind, L demnach gleich der Formänderungsenergie ist:

$$L = \frac{1}{2} E^{\alpha\beta, \lambda\mu} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\lambda\mu}, \quad (2,25)$$

mit konstantem Elastizitätstensor. Nach (2,24) und (2,2) ist dann in erster Näherung

$$L^* = L \cdot \frac{1 + 2kc}{1 + 2c} = L [1 + 2c(k - 1)].$$

Ferner ist ebenso

$$\sqrt{g^*} dx^{1*} \dots dx^{n*} = (1 + nc) \sqrt{g} dx^1 \dots dx^n,$$

n wieder die Anzahl der Dimensionen. Aus der Invarianzforderung (1,9) folgt daher

$$[1 + 2c(k - 1)] \cdot [1 + nc] = 1,$$

also

$$k = 1 - \frac{n}{2} = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 2, \\ -\frac{1}{2} & \text{für } n = 3. \end{cases} \quad (2,26)$$

Man bestätigt leicht, daß dann der Vektor \mathfrak{N} :

$$N^i = L r^i - r^\lambda p^{i\beta} \nabla_\lambda u_\beta + \left(1 - \frac{n}{2}\right) p^{i\beta} u_\beta \quad (2,27)$$

nach (2,25), (2,6) und (1,11) divergenzfrei wird, so daß im ebenen Falle

$$\oint [L r_n - r^\lambda \mathfrak{P} \circ \partial_\lambda \mathbf{u}] ds = 0, \quad (2,28)$$

im räumlichen Falle

$$\iiint \left[L r_n - r^\lambda \mathfrak{P} \circ \partial_\lambda \mathbf{u} - \frac{1}{2} \mathfrak{P} \circ \mathbf{u} \right] dF = 0 \quad (2,29)$$

gilt; $r_n = \mathbf{r} \circ \mathbf{n}$.

3. Anwendungen

3.1 Torsionstheorie

Die Endflächen (1) ($z = 0$) und (2) ($z = l$) eines geraden, zylindrischen, elastischen Balkens seien durch Schubspannungen in geeigneter Weise belastet, deren Momente $M_{(1)} = -M$, $M_{(2)} = +M$ sind, und deren Kräftesummen verschwinden. Der Zylindermantel ist lastfrei; Volumkräfte sind nicht vorhanden. Bei konstantem Schubmodul ist das Problem daher translationsinvariant, und es kann (2,14) angewendet werden. Diese Formel ergibt hier sofort

$$\iint_{(\text{Mantel})} n L dF = 0 \quad (3,1)$$

$$\text{mit} \quad L = \frac{\tau^2}{2G}, \quad \tau^2 = \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2. \quad (3,2)$$

und τ ist längs jeder Erzeugenden des Zylindermantels konstant. Daher gilt für die Randkurve einer beliebigen Querschnittsfläche

$$\oint n \tau_{Rd}^2 ds = 0, \quad (3,3)$$

und zwar offenbar auch dann, wenn der Querschnitt mehrfach zusammenhängend ist.

Ein unmittelbarer Beweis dieser merkwürdigen Formel aus den Gleichungen der Torsionstheorie heraus kann etwa folgendermaßen erbracht werden: Es ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \oint n \tau_{Rd}^2 ds &= \iint \frac{1}{2} \text{grad}(\tau^2) dF = \\ &\quad (\text{Querschnitt}) \\ &= \iint_{(x,y)} \left[\tau_{zx} \cdot \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \tau_{zy} \cdot \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. \tau_{zx} \cdot \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} + \tau_{zy} \cdot \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} \right] dx dy. \end{aligned}$$

Nun sei ϑ die auf die Längeneinheit bezogene Verdrehung des Balkens, $w(x, y)$ die Querschnittsverwölbung (vgl. hierzu etwa [7]).

Dann gilt

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= G \left(-\vartheta y + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \tau_{zy} &= G \left(\vartheta x + \frac{\partial w}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Die Gleichgewichtsbedingung lautet:

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0.$$

und mit

$$\vec{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{bmatrix}$$

ist

$$\iint_{(x,y)} \vec{\tau} dx dy = 0, \quad \vec{\tau}_{Rad} \circ \mathbf{n} = 0.$$

Infolgedessen wird

$$\begin{aligned} & \iint_{(x,y)} \left[\tau_{zx} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \tau_{zy} \cdot \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} \right] dx dy = \\ & = \iint_{(x,y)} G \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\tau_{zx} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau_{zy} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] dx dy = \oint G \frac{\partial w}{\partial x} \mathbf{n} \cdot \vec{\tau}_{Rad} ds = 0, \end{aligned}$$

und ebenso zeigt man, daß das Integral

$$\iint \left[\tau_{zx} \cdot \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} + \tau_{zy} \cdot \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} \right] dx dy$$

verschwindet.

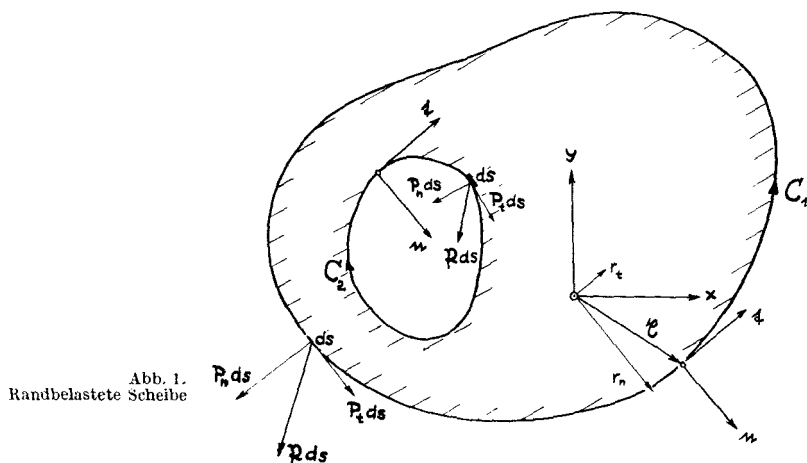
3.2 Translationsinvarianz ebener Spannungszustände

Die Koordinaten werden so gewählt, daß der elastische Bereich in die Ebene $z = x^{(3)} = 0$ fällt. Die Randkurven des Bereiches seien C_1, \dots, C_m (Abb. 1), mit den begleitenden Einheitsvektoren \mathbf{n} und \mathbf{t} . Auf den Randkurven gilt dann

$$\mathbf{g}^i = n^i \mathbf{n} + t^i \mathbf{t}$$

mit

$$n^i = \mathbf{n} \circ \mathbf{g}^i, \quad t^i = \mathbf{t} \circ \mathbf{g}^i. \quad (3.4)$$



Wir betrachten nur randbelastete, elastisch homogene Scheiben, die aber anisotrop sein können.

Die Auswertung von (2,14) ergibt:

$$\oint_{c_1, \dots, c_m} \left[n \left(L - \mathfrak{P} \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \right) - t \left(\mathfrak{P} \cdot \frac{\partial u}{\partial s} \right) \right] ds = 0. \quad (3,5)$$

Dies wenden wir auf die Technische Biegelehre des geraden homogenen Balkens mit Rechteckquerschnitt an, der (Abb. 2) in $y = -\frac{h}{2}$ kontinuierlich

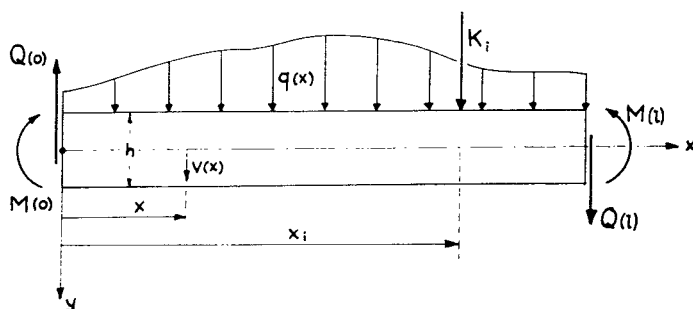


Abb. 2. Homogener Balken

durch $q(x)$ und durch Einzelkräfte K_i belastet ist, ferner durch Kräfte und Momente an den Balkenenden $x=0$, $x=l$. Wir beachten, daß

$$u(x, y) = \begin{bmatrix} -y \cdot v'(x) \\ v(x) \end{bmatrix},$$

$$v''(x) = -\frac{M(x)}{EJ}, \quad L = \frac{1}{2} y^2 \frac{M^2(x)}{EJ}$$

($M(x)$ das Biegemoment) und schließlich

$$\int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} dy = Q(x)$$

die auf die Querschnittsbreite „1“ bezogene Querkraft ist. In x -Richtung liefert dann (3.5) identisch Null, in y -Richtung aber:

$$\int_0^l q(x) \cdot v'(x) dx + \sum_i K_i \cdot v'(x_i) + \frac{1}{2EJ} [M^2(l) - M^2(0)] - [Q(l) \cdot v'(l) - Q(0) \cdot v'(0)] = 0. \quad (3.6)$$

Als Beispiel nehmen wir einen in $\xi = 0$ freien, in $\xi = l$ eingespannten, mit $q(\xi)$ belasteten Balken. Der Belastung fügen wir an der Stelle $\xi = x$ eine Einzelkraft X in negativer y -Richtung hinzu. Aus (3,6) wird dann

$$X \cdot \frac{\partial v(\xi, x)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=x} = \int_0^l q(\xi) \frac{\partial v(\xi, x)}{\partial \xi} d\xi + \frac{1}{2 E J} M^2(l, x),$$

mit

$$v(\xi, x) = v_q(\xi) + X \psi(\xi, x)$$

und

$$M(l, x) = - \int_0^l \xi \cdot q(\xi) d\xi + X \cdot (l - x).$$

Durch Vergleich der in X linearen Glieder finden wir

$$v'_q(x) = \int_0^l q(\xi) \frac{\partial \psi(\xi, x)}{\partial \xi} d\xi - \frac{1}{E J} \int_0^l (l - x) \xi q(\xi) d\xi.$$

$\frac{\partial \psi(\xi, x)}{\partial \xi}$ bestimmt man elementar mit Hilfe der Mohrschen Analogie als „Querkraft“ am adjungierten Balken zu

$$\frac{\partial \psi(\xi, x)}{\partial \xi} = \begin{cases} \frac{1}{2 E J} (l - x)^2 & \text{für } 0 \leq \xi \leq x, \\ \frac{1}{2 E J} [(l - x)^2 - (\xi - x)^2] & \text{für } x \leq \xi \leq l, \end{cases}$$

so daß schließlich mit

$$v'_q(x) = \frac{1}{2 E J} \left\{ \int_0^l q(\xi) [(l - x)^2 - 2 \xi (l - x)] d\xi - \int_x^l q(\xi) (\xi - x)^2 d\xi \right\} \quad (3,7)$$

in einfachster Weise eine quellenmäßige Darstellung der Balkenneigung gefunden ist.

Wenn ferner ein an den Enden gelenkig gelagerter Balken eine konstante Last q_0 und an der Stelle $x = a$ eine Einzelkraft K trägt, liest man aus (3,6) sofort für K und die Auflagerkräfte A und B die Beziehung

$$A \cdot v'(0) + B \cdot v'(l) = K \cdot v'(a) \quad (3,8)$$

ab; Gleichungen dieser Art kann man gelegentlich zur Behandlung statisch unbestimmt gestützter Balken verwenden, was hier jedoch nicht näher ausgeführt werden soll.

3.3 Rotationsinvarianz ebener Spannungszustände

Eine elastisch homogene und isotrope Scheibe sei nur durch Randkräfte belastet. Dann gilt (2,10), und mit (3,4) erhalten wir nach einiger Zwischenrechnung:

$$\oint \left\{ r_t \cdot \left[L - \left(\mathfrak{P} \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \right) \right] - r_n \left(\mathfrak{P} \cdot \frac{\partial u}{\partial s} \right) + u_n P_t - u_t P_n \right\} ds = 0 \quad (3,9)$$

mit $r_t = \mathbf{r} \cdot \mathbf{t}$ usw.

Hier ist der Fall der randbelasteten, elastisch isotropen *Kreisscheibe* von Interesse. Für sie ist $r_t = 0$, r_n gleich dem Kreistradius a . Wir setzen

$$P_n = P_r, \quad P_t = P_\varphi; \quad u_n = u_r, \quad u_t = u_\varphi$$

und beachten, daß für die Einheitsvektoren \mathbf{n}_r und \mathbf{n}_φ gilt:

$$\frac{\partial \mathbf{n}_r}{\partial \varphi} = \mathbf{n}_\varphi, \quad \frac{\partial \mathbf{n}_\varphi}{\partial \varphi} = -\mathbf{n}_r.$$

Wir erhalten dann die einfache Formel

$$\oint \left[P_r \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + P_\varphi \cdot \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right] d\varphi = 0 \quad (3,10)$$

3.4 Rotationskörper mit elastischer Rotationssymmetrie

Wir verwenden (Abb. 3) die allgemeinen Koordinaten

$$x^{(1)} = z, \quad x^{(2)} = \varrho, \quad x^{(3)} = \varphi$$

und, nach Bedarf, die orthogonalen Dreieine

$$\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_\varrho, \mathbf{e}_\varphi \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{n}, \mathbf{e}_\varrho, \mathbf{e}_\varphi$$

von Einheitsvektoren. Aus

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \varrho \cos \varphi \\ \varrho \sin \varphi \\ z \end{bmatrix}$$

ergeben sich die Maßvektoren

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{g}_2 = \mathbf{e}_\varrho, \quad \mathbf{g}_3 = \varrho \mathbf{e}_\varphi;$$

$$\mathbf{g}^1 = \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{g}^2 = \mathbf{e}_\varrho, \quad \mathbf{g}^3 = \frac{1}{\varrho} \mathbf{e}_\varphi;$$

also ist

$$\mathbf{e}_z \circ (\mathbf{x} \times \mathbf{g}^1) = 0,$$

$$\mathbf{e}_z \circ (\mathbf{x} \times \mathbf{g}^2) = 0,$$

$$\mathbf{e}_z \circ (\mathbf{x} \times \mathbf{g}^3) = 1.$$

Daher entsteht aus (2,10) nach skalarer Multiplikation mit e_z :

$$\iint_{(F)} \left[\mathfrak{P} \circ \frac{\partial u}{\partial \varphi} - e_z \circ (u \times \mathfrak{P}) \right] dF = 0.$$

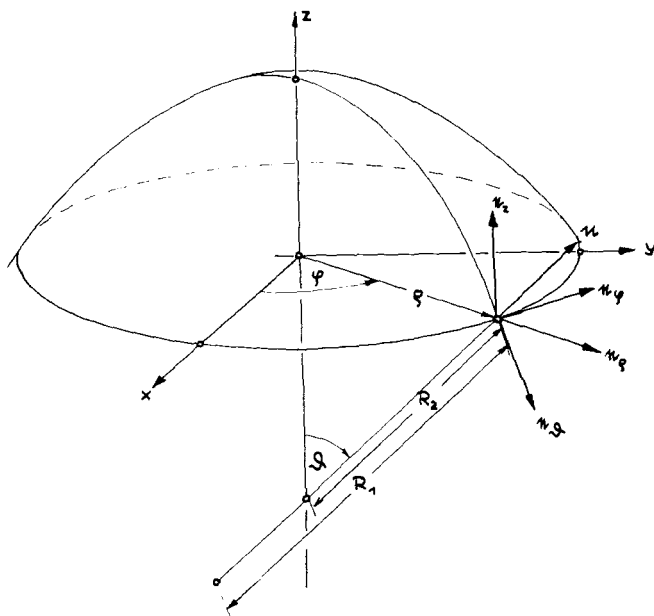


Abb. 3. Rotationskörper

Wir zerlegen \mathfrak{P} und u :

$$\mathfrak{P} = n P_n + e_\theta P_\theta + e_\varphi P_\varphi.$$

$$u = n u_n + e_\theta u_\theta + e_\varphi u_\varphi$$

und bemerken noch, daß

$$\frac{\partial n}{\partial \varphi} = e_z \times n, \quad \frac{\partial e_\theta}{\partial \varphi} = e_z \times e_\theta, \quad \frac{\partial e_\varphi}{\partial \varphi} = e_z \times e_\varphi$$

ist. So ergibt sich die Formel

$$\boxed{\iint_{(F)} \left[P_n \cdot \frac{\partial u_n}{\partial \varphi} + P_\theta \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} + P_\varphi \cdot \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right] dF = 0} \quad (3.11)$$

von der (3,10) natürlich ein Sonderfall ist.

Für eine homogene, isotrope *Kreisplatte* (Abb. 4) kann (3,11) in bemerkenswerter Weise umgeformt werden. Wir zerlegen, nach den Annahmen der klassischen Plattentheorie, den Verschiebungsvektor:

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_z \cdot w(r, \varphi) - \mathbf{e}_r \cdot z \cdot \frac{\partial w(r, \varphi)}{\partial r} - \mathbf{e}_\varphi \cdot \frac{z}{r} \cdot \frac{\partial w(r, \varphi)}{\partial \varphi}; \quad (3,12)$$

für den Plattenrand $r = a$ ist also

$$u_n = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial r}, \quad u_\vartheta = w, \quad u_\varphi = -\frac{z}{a} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi}.$$

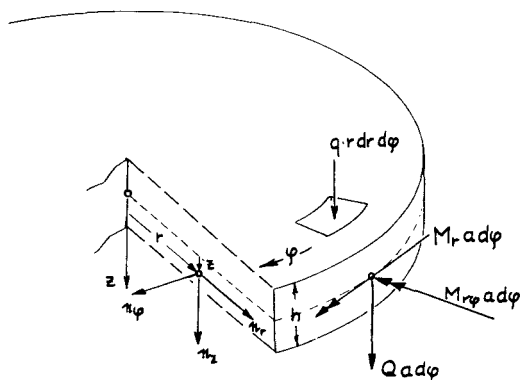


Abb. 4. Kreisplatte

Auf der Lastfläche haben wir

$$P_n = q(r, \varphi), \quad P_\vartheta = 0, \quad P_\varphi = 0$$

und auf dem Plattenrand

$$P_n = \sigma_r, \quad P_\vartheta = \tau_{rz}, \quad P_\varphi = \tau_{r\varphi}.$$

Beachtet man, daß ferner auf dem Plattenrand

$$\int_{-h/2}^{+h/2} z \cdot \sigma_r dz = M_r \quad \text{das Randbiegemoment.}$$

$$\int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{rz} dz = Q_r \quad \text{die Randquerkraft.}$$

$$\oint_{-h/2}^{+h/2} z \cdot \tau_{r\varphi} dz = M_{r\varphi} \quad \text{das Randtorsionsmoment}$$

ist, so geht (3,11), mit Berücksichtigung von Einzelkräften, zunächst in

$$\begin{aligned} & \iint q(r, \varphi) \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} \cdot r dr d\varphi + \sum_i K_i \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} \bigg|_{\substack{r=r_i \\ \varphi=\varphi_i}} = \\ & = \oint \left[M_r \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - Q_r \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} + M_{r\varphi} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right]_{r=a} \cdot a d\varphi \end{aligned} \quad (3,13)$$

über. Nach partieller Integration des letzten Termes erscheint die Kirchhoffsche Ersatzkraft, und mit

$$\tilde{Q}(a, \varphi) = Q_r(a, \varphi) + \frac{1}{a} \frac{\partial M_{r\varphi}(a, \varphi)}{\partial \varphi}$$

erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} & \boxed{\iint q(r, \varphi) \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} \cdot r dr d\varphi + \sum_i K_i \frac{\partial w}{\partial \varphi} \bigg|_{\substack{r=r_i \\ \varphi=\varphi_i}} =} \\ & = \oint \left[M_r \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \tilde{Q} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right]_{r=a} \cdot a d\varphi \end{aligned} \quad (3,14)$$

Auf Grund der Randbedingungen verschwindet das Randintegral immer dann, wenn keine zusätzlichen Randlasten vorhanden sind; dann bleibt also

$$\iint q(r, \varphi) \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} \cdot r dr d\varphi = 0 \quad (3,15)$$

für die nur kontinuierlich belastete Kreisplatte, und

$$\sum_i K_i \frac{\partial w}{\partial \varphi} \bigg|_{\substack{r=r_i \\ \varphi=\varphi_i}} = 0 \quad (3,16)$$

für die Kreisplatte unter Einzellasten. Wenn, für zwei Einzelkräfte K_1 und K_2 , die Durchbiegung als

$$w(r, \varphi) = K_1 \cdot \psi_1(r, \varphi) + K_2 \cdot \psi_2(r, \varphi)$$

angesetzt wird, ist

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} \bigg|_{\substack{r=r_1 \\ \varphi=\varphi_1}} + \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} \bigg|_{\substack{r=r_2 \\ \varphi=\varphi_2}} = 0 \quad (3,17)$$

eine Art *Bettischer Satz*, eine Folge von (3,16).

Die Beziehung (3,14) muß ein „Integral“ der Plattengleichungen sein. Das ist, nachträglich!, auch leicht zu bestätigen: Wir verwenden die bekannten Formeln (z. B. in [8])

$$q(r, \varphi) = D \cdot \Delta \Delta w,$$

$$M_r = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right],$$

$$Q_r = -D \cdot \frac{\partial (\Delta w)}{\partial r},$$

$$M_{r\varphi} = -D(1 - \nu) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right];$$

D ist die (konstante) Plattensteifigkeit. Daher liefert die Greensche Formel zunächst

$$\begin{aligned} \iint q(r, \varphi) \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} \cdot r \, dr \, d\varphi &= \iint D \cdot \Delta w \cdot \Delta \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \cdot r \, dr \, d\varphi - \\ &- \oint \left[Q_r \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} + D \cdot \Delta w \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} \right] \cdot a \, d\varphi. \end{aligned} \quad (3.18)$$

wobei wir Einzelkräfte K_i nicht explizit berücksichtigt haben, für die ja $\Delta \Delta w_i = 0$ gilt.

Nun ist

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) &= \frac{\partial}{\partial \varphi} (\Delta w), \\ \Delta w \cdot \Delta \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{1}{2} (\Delta w)^2 \right], \end{aligned}$$

und Δw eine eindeutige Funktion von φ . Daher wird

$$\iint D \cdot \Delta w \cdot \Delta \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \cdot r \, dr \, d\varphi = 0.$$

Ferner ist

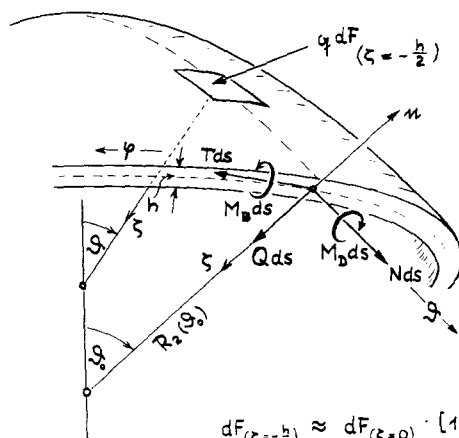
$$\begin{aligned} D \cdot \Delta w &= D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right] = \\ &= -M_r + D(1 - \nu) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right], \end{aligned}$$

und

$$\frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right].$$

Berücksichtigt man, daß $\frac{\partial w}{\partial r}$ eindeutig von φ abhängt, und setzt alles in (3,18) ein, so kommt man in der Tat auf (3,14).

Ebenso wie die Kreisplatte kann die durch Oberflächenlasten (beispielsweise auf der äußeren Schalenlaibung der Abb. 5) und durch Randlasten bean-



$$dF_{(\zeta=-\frac{h}{2})} \approx dF_{(\zeta=0)} \cdot [1 + hH]$$

$$ds = R_2(\varphi_0) \cdot \sin \vartheta_0 \cdot d\varphi$$

Abb. 5. Rotationsschale

spruchte, elastisch homogene und isotrope *Rotationsschale* behandelt werden. Der Einfachheit halber setzen wir konstante Dicke h voraus und die Gültigkeit der Bernoullischen Hypothese vom Starrbleiben der Querschnittsflächen.

Statische Größen:

$q_\vartheta, q_\varphi, q_z$: Komponenten der Belastung q auf der Fläche $\zeta = -h/2$,

N, T, Q : Längs-, Ringschub- und Querkraft am Schalenrande $\vartheta = \vartheta_0$.

M_B, M_D : Biege- und Drillmoment am Schalenrande $\vartheta = \vartheta_0$;

Kinematische Größen:

u_0, v_0, w_0 :

Verschiebungen eines Mittelflächenpunktes,

$$u = u_0 - \zeta \cdot \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial w_0}{\partial \vartheta}$$

$$v = v_0 - \zeta \cdot \frac{1}{R_2 \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial w_0}{\partial \varphi}$$

$$w = w_0$$

Verschiebungen eines Querschnittspunktes
im Abstände ζ von der Mittelfläche.

In Analogie zur Herleitung der Plattenformel (3,14) lesen wir dann aus Abb. 5 die Beziehung

$$\iint \left(q_\vartheta \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} + q_\varphi \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} + q_z \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) (1 + h \cdot H) R_1 R_2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \\ = R_2 (\vartheta_0) \sin \vartheta_0 \cdot \oint \left(M_B \cdot \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \vartheta \partial \varphi} - N \cdot \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} - T \cdot \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} - \tilde{Q} \cdot \frac{\partial w_0}{\partial \varphi} \right) d\varphi \quad (3,19)$$

ab; darin ist wieder, nach einer partiellen Integration, die effektive Querkraft

$$\tilde{Q} = Q + \frac{1}{R_2 (\vartheta_0) \sin \vartheta_0} \cdot \frac{\partial M_D}{\partial \varphi}$$

eingeführt worden, und H ist die mittlere Krümmung der Schalenmittelfläche. Glieder von der Größenordnung $\left(\frac{h}{R_1}\right)^2$ usw. wurden unterdrückt. Ohne merklichen Fehler wird man i. a. im Lastflächenintegral die Größe $h \cdot H$ gegen 1 vernachlässigen und auch u, v, w durch ihre Werte u_0, v_0, w_0 auf der Mittelfläche ersetzen dürfen. Ist keine explizite Randbelastung vorhanden, so fällt das Umlaufintegral in (3,19) infolge der Randbedingungen weg, und man kommt, indem man Einzelkräfte auf die Lastfläche aufbringt, wieder leicht zu Reziprozitätssätzen wie (3,17) auch für die Rotationsschale; dies bedarf wohl keiner näheren Erläuterung.

3.5 Ähnlichkeitsinvarianz

3.5.1 Randbelastete, elastisch homogene und isotrope Kreisscheibe (Radius a)

Für sie ist $r_n = a$, und (2,28) liefert die Beziehung

$$\oint \left[P_r \cdot \frac{\partial u_r}{\partial r} + P_\varphi \cdot \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right] d\varphi = \oint L d\varphi \quad (3,20)$$

die man mit (3,10) zu einem Formelpaar zusammenfassen möge.

3.5.2 Oberflächenbelastete, elastisch homogene Kugel mit elastischer Rotationssymmetrie um die z -Achse (Radius a)

Hier entnimmt man (2,29) zunächst die Formel

$$\iint \left[\mathfrak{P} \cdot \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial r} + \frac{1}{2a} \mathfrak{P} \circ \mathfrak{u} \right] dF = \int \mathfrak{L} dF \quad (3,21)$$

Man wird sodann den Verschiebungsvektor der Transformation

$$u = u' \cdot \sqrt{\frac{a}{r}}$$

unterwerfen, die (3,17) in

$$\iint \mathfrak{P} \cdot \frac{\partial u'}{\partial r} dF = \iint L dF$$

überführt oder, ausgeschrieben, in die Formel

$$\left\{ \iint \left[P_r \frac{\partial u'_r}{\partial r} + P_\vartheta \frac{\partial u'_\vartheta}{\partial r} + P_\varphi \frac{\partial u'_\varphi}{\partial r} \right] dF = \iint L dF \right\}, \quad (3,22)$$

der die Formel (3,11) an die Seite zu stellen ist: Diese nämlich kann für den Sonderfall der Kugel in

$$\left\{ \iint \left[P_r \frac{\partial u'_r}{\partial \varphi} + P_\vartheta \frac{\partial u'_\vartheta}{\partial \varphi} + P_\varphi \frac{\partial u'_\varphi}{\partial \varphi} \right] dF = 0 \right\} \quad (3,23)$$

umgeformt werden.

Auch für den *Keil* und für den *Kreiskegel*, auf deren Flanken bzw. Mantel $r_n = 0$ wird, wenn man den Nullpunkt des Koordinatensystems in die Spitze legt, ergeben sich aus (2,28) bzw. (2,29) übersichtliche Formeln, die hier jedoch nicht weiter besprochen werden sollen.

Literatur

- [1] Noether, E.: Invariante Variationsprobleme. Nachr. d. Kgl. Gesellsch. d. Wiss., Göttingen 1918, S. 235–257.
- [2] Courant, R., und Hilbert, D.: Methoden der Mathematischen Physik I, Berlin 1931.
- [3] Wentzel, G.: Quantum Theory of Fields, New York 1949.
- [4] Bogoliubov, N. N., und Shirkov, D. V.: Introduction to the Theory of Quantized Fields, New York u. London 1959.
- [5] Roman, P.: Theory of Elementary Particles, Amsterdam 1960.
- [6] Leibfried, G.: Mechanische und thermische Eigenschaften der Kristalle, in: Handbuch der Physik VII,1 (Kristallphysik I), Berlin–Göttingen–Heidelberg 1955.
- [7] Weber, C., und Günther, W.: Torsionstheorie, Braunschweig 1958.
- [8] Timoshenko, S., und Woinowsky-Krieger, S.: Theory of Plates and Shells, 2nd. ed. New York–Toronto–London 1959.